Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

Viernes 18 de noviembre de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

8816 – 7228

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 11]

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)y = x^2$, sabiendo que $y = 2$ cuando $x = 0$.

(a) Muestre que $1 + x^2$ es un factor integrante para esta ecuación diferencial. [5]

(b) A partir de lo anterior, resuelva esta ecuación diferencial. Dé la respuesta en la forma $y = f(x)$. [6]

2. [Puntuación máxima: 18]

(a) Mediante derivaciones sucesivas, halle los cuatro primeros términos no nulos en el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$. [11]

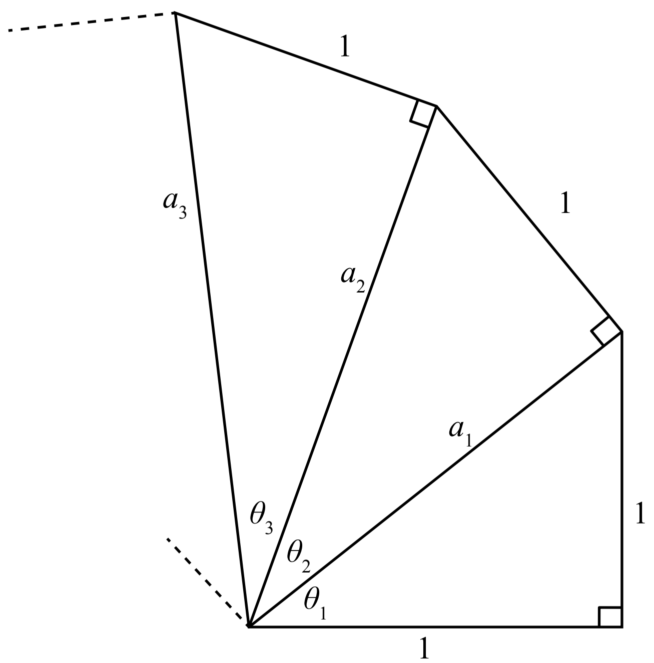
(b) Deduzca que, en este desarrollo en serie, el coeficiente de x^n, para $n \geq 2$, es $(-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$. [1]

(c) Aplicando el criterio de D'Alembert, halle el radio de convergencia de esta serie de Maclaurin. [6]

3. [Puntuación máxima: 15]

(a) Utilizando la regla de l'Hôpital, halle $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)}} \right)}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} \right)$. [6]

Considere la espiral infinita de triángulos rectángulos que aparece en el siguiente diagrama.



En el n-ésimo triángulo de la espiral, el ángulo central es θ_n, la hipotenusa tiene una longitud a_n y el lado opuesto una longitud igual a 1, tal y como se muestra en el diagrama. El primer triángulo rectángulo es isósceles y los dos lados iguales tienen una longitud igual a 1.

(b) (i) Halle a_1 y a_2 y, a partir de lo anterior, escriba una expresión para a_n.

(ii) Muestre que $\theta_n = \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)}}$. [3]

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$.

(c) Utilizando un criterio adecuado, determine si esta serie converge o diverge. [6]

4. [Puntuación máxima: 16]

(a) Indique el teorema del valor medio para una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$. [2]

Sea $f(x)$ una función cuyas derivadas primera y segunda existen en el intervalo cerrado $[0, h]$.

Sea $g(x) = f(h) - f(x) - (h - x)f'(x) - \frac{(h - x)^2}{h^2}\left(f(h) - f(0) - hf'(0)\right)$.

(b) (i) Halle $g(0)$.

(ii) Halle $g(h)$.

(iii) Aplique el teorema del valor medio a la función $g(x)$ en el intervalo cerrado $[0, h]$ para mostrar que existe c perteneciente al intervalo abierto $]0, h[$ tal que $g'(c) = 0$.

(iv) Halle $g'(x)$.

(v) A partir de lo anterior, muestre que

$$-(h - c)f''(c) + \frac{2(h - c)}{h^2}\left(f(h) - f(0) - hf'(0)\right) = 0.$$

(vi) Deduzca que $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(c)$. [9]

(c) A partir de lo anterior, muestre que, para $h > 0$

$$1 - \cos(h) \leq \frac{h^2}{2}.$$ [5]